

Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Пашковская О. В.
S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, O. V. Pashkovskaya

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

CONSERVATION LAWS IN THE MECHANICS OF A DEFORMABLE SOLID

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор Сибирского государственного университета науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (Россия, Красноярск); тел. +7(391)291-91-43. E-mail: sen@sibsau.ru.

Sergey I. Senashov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Siberian State University of Science and Technology (Russia, Krasnoyarsk); tel. +7(391)291-91-43. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент Сибирского государственного университета науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (Россия, Красноярск); тел. +7(391)291-91-43. E-mail: ruppa@inbox.ru.

Irina L. Savostyanova – PhD in Pedagogy, Associate Professor, Siberian State University of Science and Technology (Russia, Krasnoyarsk); tel. +7(391)291-91-43. E-mail: ruppa@inbox.ru.

Пашковская Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент Сибирского государственного университета науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (Россия, Красноярск); тел. +7(391)291-91-19. E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru.

Olga V. Pashkovskaya – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Siberian State University of Science and Technology (Russia, Krasnoyarsk); tel. +7(391)291-91-19. E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru.

Аннотация. В статье рассказывается о методах построения законов сохранения для уравнений механики деформируемого твёрдого тела. Показано применение законов сохранения для решения краевых задач уравнений теории двумерной идеальной пластичности, первой краевой задачи теории упругости в двумерном и трёхмерном случаях. Законы сохранения позволили найти упругопластическую границу в задаче о напряжённом состоянии композитного бруса.

Summary. The authors write about methods for constructing conservation laws for equations of deformable solid mechanics in this article. The authors write about the application of conservation laws to solve boundary value problems of equations of the theory of two-dimensional ideal plasticity, the first boundary value problem of elasticity theory in two-dimensional and three-dimensional cases. Conservation laws made it possible to find an elastic-plastic boundary in the problem of the stress state of a composite beam.

Ключевые слова: законы сохранения уравнений механики, краевые задачи, пластичность, упругость, композитные материалы.

Key words: laws of conservation of equations of mechanics, boundary value problems, plasticity, elasticity, composite materials.

УДК 539.374

Введение

Определение 1. Законом сохранения называют соотношение вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

сохраняющимся током назовём вектор $S = (S_1, \dots, S_n)$, удовлетворяющий условию (1).

Это определение далее будет уточнено.

Э. Нетер в 1918 г. установила связь между инфинитезимальными симметриями функционала

$$\int L(x, u, u') dx$$

и законами сохранения системы уравнений Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial u_k} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – независимые переменные; $u = (u_1, \dots, u_m)$ – зависимые функции, определённые в некоторой области $\Omega \subset R^n$, $u'_j = \frac{\partial}{\partial x_j} u$ – их частные производные [6].

Позднее важные результаты в этом направлении были получены Ф. Клейном и К. Якоби. В 70-е годы прошлого столетия было получено много обобщений теоремы Нетер на другие виды симметрий.

Заметим, что законы сохранения, без этого термина, использовались ранее в работах Римана и Вольтерры. Они применяли известное тождество

$$vLu - uL^*v = \operatorname{div} S, \quad Lu = 0, \quad L^*v = 0, \quad (2)$$

где L – линейный оператор; L^* – оператор, формально сопряжённый к L .

Риман, а позднее Вольтерра с помощью тождества (2) решали краевые задачи для гиперболических уравнений [13]. Актуальность краевых задач и разнообразные подходы к их решению отмечены в работах [1–3; 7; 9].

Подход к построению законов сохранения, обобщающий результаты Нетер на произвольные системы дифференциальных уравнений, появился в работах [4; 18]. Авторами этих работ был введён оператор универсальной линеаризации, который для системы дифференциальных уравнений

$$F = 0 \quad (3)$$

имеет вид

$$l_F = \begin{vmatrix} \sum_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial p_{\sigma}^1} D_{\sigma} & \dots & \sum_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial p_{\sigma}^m} D_{\sigma} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\sigma} \frac{\partial F_r}{\partial p_{\sigma}^1} D_{\sigma} & \dots & \sum_{\sigma} \frac{\partial F_r}{\partial p_{\sigma}^m} D_{\sigma} \end{vmatrix},$$

где $F = (F_1, \dots, F_r)$, $F_i = F_i(x, u, \dots, u_{(s)})$ и $u_{(s)}$ есть общая частная производная порядка s функций u_i относительно переменных x_j ,

$$p_{\sigma}^i = \frac{\partial^{|\sigma|} u_i}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad |\sigma| = i_1 + \dots + i_n, \quad \sigma = (i_1, \dots, i_n).$$

Обобщённый дифференциальный оператор по x_j есть

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\sigma, i} P_{\sigma j}^i \frac{\partial}{\partial p_{\sigma}^i}, \quad \text{где } \sigma j = (i_1, \dots, i_j + 1, \dots, i_n).$$

Пусть $D_{\sigma} = D_1^{i_1} \circ \dots \circ D_n^{i_n}$, где σ определено выше. Тогда

$$\psi l_F \phi - \phi l_F^* \psi = \operatorname{div} S, \quad l_F \phi = \Pi_1(F) = 0, \quad l_F^* \psi = \Pi_2(F) = 0, \quad (4)$$

где Π_1, Π_2 – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не тождественно равные нулю. Здесь и далее под системой (3) понимаются также и все её дифференциальные следствия вида $D_{\sigma}(F_i) = 0 \quad \forall \sigma, i$. Функции ϕ, ψ называются производящими функциями симметрий и законов сохранения соответственно.

Из (4) получаем следующее более точное определение закона сохранения.

Определение 2. Законом сохранения называют соотношение вида

$$\operatorname{div} S = \Pi(F), \quad (5)$$

где Π – некоторый линейный дифференциальный оператор, тождественно не равный нулю.

Равенство (5) позволяет искать законы сохранения более простым способом, чем через поиск производящей функции ψ закона сохранения, и именно в том виде, который более устраивает исследователя. С помощью формулы (5) были найдены законы сохранения, которые удалось использовать для решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ). В этом и состоит скромный вклад авторов в данную тематику.

Законы сохранения и их использование для решения гиперболических систем уравнений МДТТ

Вычислим законы сохранения для уравнений идеальной пластичности и используем их для решения задачи Коши [10].

В определениях первой части имеем

$$F_1 = u_1^1 + u_1^2 \cos 2u^2 + u_2^2 \sin 2u^2 = 0, \quad F_2 = u_2^1 + u_1^2 \sin 2u^2 - u_2^2 \cos 2u^2 = 0,$$

$$u^1 = p, \quad u^2 = \theta.$$

Это система гиперболического типа.

Задача Коши для неё имеет вид

$$u^1|_L = f^1(x_1, x_2), \quad u^2|_L = f^2(x_1, x_2).$$

Из

$$\tilde{l}_F^* \begin{pmatrix} \tilde{w}^1 \\ \tilde{w}^2 \end{pmatrix} = 0$$

получим

$$\partial_1 w^1 + \partial_2 w^1 = A(F). \quad (6)$$

Система (6) линейна, поэтому она имеет бесконечную серию законов сохранения.

Имеем (см. рис.1):

$$\iint_S \operatorname{div} w dx dy = \int_{PS} -w^1 dy + w^2 dx + \int_{SR} -w^1 dy + w^2 dx + \int_{RP} -w^1 dy + w^2 dx = 0. \quad (7)$$

Находим такие решения системы (6), чтобы $\int_{SR} = \int_{RP} = 0$.

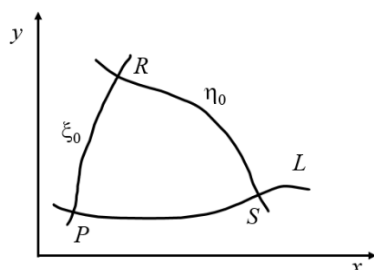


Рис. 1. Задача Коши

Тогда из (7) можно, интегрируя по частям, найти координаты точки пересечения R . Это позволяет построить характеристики системы уравнений пластичности и тем самым решить задачу Коши.

Использование законов сохранения для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих изгиб композитного бруса

Постановка задачи. Рассмотрим брус, изготовленный из упругопластического материала, армированный n упругими волокнами (см. рис. 2). Один конец бруса закреплён в точке $z = 0$, на втором конце бруса при $z = l$ подвешен груз весом P в начале координат, которое совпадает с центром тяжести сечения. Матрица бруса имеет модуль упругости G и предел текучести при чистом сдвиге k_s . Волокна расположены вдоль оси бруса в произ-

вольном порядке параллельно оси z . Каждое волокно имеет круглое сечение, центр волокна располагается в точке с координатами (x_i, y_i) , радиус волокна равен R , модуль упругости G_i . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k_s$ [8].

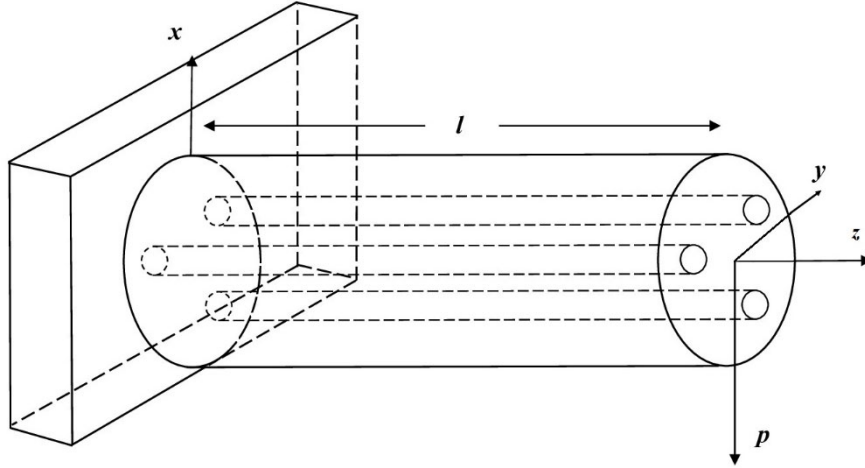


Рис. 2. Брус с упругими волокнами

Заданный процесс описывается уравнением равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{Px}{I}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = -\frac{P}{(1+\nu)I}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_z = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad I = \int_S x^2 ds.$$

Из двух последних уравнений (8) с учётом первого получаем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -\frac{P(2+\nu)}{I(1+\nu)}y - 2K, \quad (9)$$

где K – постоянная, являющаяся углом поворота объёмного элемента бруса относительно оси z ; $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ – компоненты тензора напряжений; S – поперечное сечение бруса; I – момент инерции относительно оси y .

Граничные условия на боковой поверхности бруса, свободной от напряжений и находящейся в пластическом состоянии, имеют вид

$$\tau_{xz}n_0 + \tau_{yz}m_0 = 0, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 = k_s^2 - 1/3\sigma_z^2,$$

где n_0, m_0 – компоненты вектора нормали к боковой поверхности, которые можно записать в виде

$$\tau_{xz} = \mp mk, \tau_{yz} = \pm nk. \quad (10)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия

$$\tau_{xz}m_i - \tau_{yz}n_i = \tau, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_i, m_i – компоненты вектора нормали к боковой поверхности i -го волокна, которые запишем в виде

$$\tau_{xz} = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \tau_{yz} = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (11)$$

Далее в формулах (9) – (10) выбирается верхний знак.

Законы сохранения уравнений (8) – (9). Для удобства дальнейших вычислений введём следующие обозначения:

$$\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v.$$

Тогда задача (7) – (11) запишется так:

$$F_1 = u_x - v_y - Px / I = 0, \quad (12)$$

$$F_2 = u_y - v_x + \frac{P(2+v)}{(1+v)}y + 2K = 0,$$

на боковой поверхности

$$u = -mk, v = nk,$$

на границе волокна и матрицы

$$u = m\tau + n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad v = n\tau + m\sqrt{k^2 - \tau^2}.$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (12) назовём выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (13)$$

где ω_1, ω_2 – некоторые линейные операторы, одновременно не равные тождественно нулю.

Более подробно технику вычисления законов сохранения и их использования можно найти в [5; 11; 12; 14–17].

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (14)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ – функции только от x, y . Подставляя (14) в (13), получаем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \quad \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \quad \alpha^1 = \omega_1, \quad \beta^1 = -\omega_2, \quad \alpha^2 = \omega_2, \quad \beta^2 = \omega_1, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 Px / I + \beta^1 [2K + P(2+v)y / (I(1+v))].$$

Отсюда следует

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \quad \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 Px / I + \beta^1 [2K + P(2+v)y / (I(1+v))]. \quad (15)$$

Рассмотрим для системы уравнений (15) два решения, имеющие особенности в произвольной точке (x_0, y_0) сечения:

$$1. \quad \alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 = 0, \quad \gamma^2 = -\frac{Px}{I} \arctg\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) - \frac{P(2+v)}{I(1+v)} \left[y - y_0 + \left(\frac{y_0}{x - x_0} + x - x_0 \right) \arctg\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \right] - K \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \quad (16)$$

$$2. \alpha_*^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\gamma_*^1 = 0, \quad \gamma_*^2 = 2K \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) + \frac{P(2 + \nu)}{I(1 + \nu)} \left[y_0 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) + \frac{x - x_0}{2} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] -$$

$$- \frac{Px^2}{2l} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right),$$

где x_0, y_0 – постоянные.

Вычисление напряжённого состояния в точке (x_0, y_0)

Пусть $(x_0; y_0)$ – произвольная точка, принадлежащая связующему, и пусть в этой точке сохраняющийся ток имеет особенность вида (16) или (17). Тогда из (13) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_0} A dy - B dx - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (18)$$

где ε – окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ (см. рис. 3).

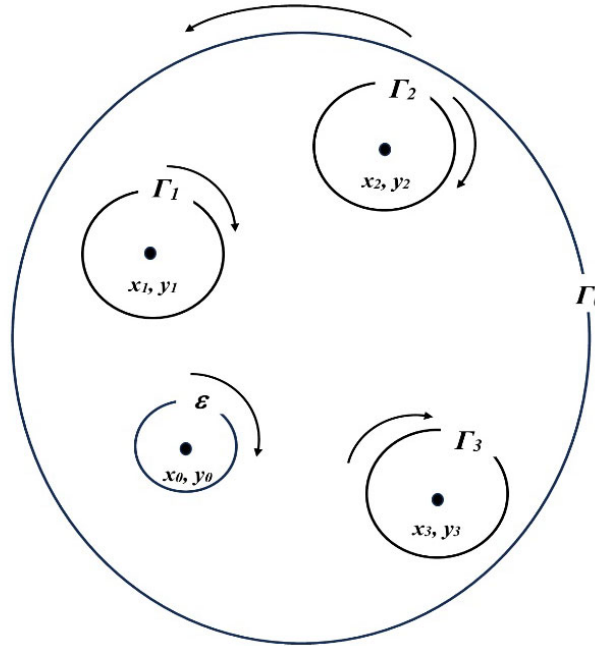


Рис. 3. Область интегрирования

Рассмотрим решение (8), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$, тогда из (18) с учётом (16) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned}
2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0} \left(m_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
& - \left(m_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \left(\frac{(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
& - \left((m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + (n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Рассмотрим другое решение уравнений (15) вида (16).

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (18), получаем

$$\begin{aligned}
2\pi\tau_{23}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0} \left(m_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
& - \left(m_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma_*^2 \right) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \left(\frac{(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
& - \left(-(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + (n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma_*^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Заключение

Полученные формулы позволяют вычислить напряжённое состояние в любой точке связующего материала. Те точки, где $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$, будут находиться в пластическом состоянии, остальные точки среды, а также волокна будут оставаться упругими.

Предложенный метод решения позволяет построить упругопластическую границу в изгибаемом композитном бруске и тем самым оценить его несущую способность. Многообразие композитов и их огромная практическая важность позволяют надеяться, что предложенная авторами методика позволит оценивать прочность конструкций, изготовленных из композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин, Б. Д. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением / Б. Д. Аннин, Н. И. Остросаблин, Р. И. Угрюмов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2023. – Т. 26. – № 1. – С. 5-19.
2. Буренин, А. А. К построению теории термоупругости при конечной скорости распространения тепла / А. А. Буренин // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № IV-1 (36). – С. 47-53.
3. Буренин, А. А. Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки / А. А. Буренин, В. П. Матвеев, А. В. Ткачева // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № III-1 (35). – С. 31-41.
4. Виноградов, А. М. Симметрии и законы сохранения / А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин. – М.: Фактор, 1996. – 461 с.
5. Киряков, П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск: СО РАН, 2001. – 120 с.

6. Нетер, Э. Инвариантные вариационные задачи / Э. Нетер // Вариационные принципы механики. – М.: Физматлит, 1959. – С. 611-630.
7. Петраков, И. Е. Анализ изгиба композитных пластин с учётом различия сопротивлений растяжению и сжатию / И. Е. Петраков, В. М. Садовский, О. В. Садовская // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – № 1. – С. 172-183.
8. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 743 с.
9. Разработка новых структур многослойных оболочковых форм по выплавляемым моделям / А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев, В. И. Одинокоев [и др.] // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № VII (47). – С. 104-107.
10. Сенашов, С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов // Доклады РАН. – 1995. – Т. 345. – № 5. – С. 619-620.
11. Сенашов, С. И. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трёхмерных уравнений теории упругости / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2024. – Т. 27. – № 1. – С. 100-111.
12. Сенашов, С. И. Напряжённое состояние композитной консоли / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16. – № 1. – С. 56-61.
13. Смирнов, В. И. Высшая математика. В 5 т. Т. 4 / В. И. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1974. – 336 с.
14. Gomonova, O. V., Senashov, S. I. Determining elastic and plastic deformation regions in a problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 62:1 (2021). – P. 157-163.
15. Senashov, S. I., Savostyanova, I. L., Cherepanova, O. N. Elastoplastic bending of the console with transverse force // J. of the Siberian Federal University. Math. and Phys., 12:5 (2019). – P. 637-643.
16. Senashov, S. I., Savostyanova, I. L. Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisila-Teodorescu system // J. Appl. Industr. Math., 25:2 (2022). – P. 101-109.
17. Senashov, S. I., Vinogradov, A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. (1988) 31. – P. 415-439.
18. Vinogradov, A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 2 (1984). – P. 21-78.